Problème

Première partie :

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine. Soient (A,B,C) et (A',B',C') deux triplets de points de $\mathcal{P}$ formés de points non alignés. On note δ_A, δ_B, δ_C, (respectivement $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$), les parallèles issues de A à B'C', de B à A'C', de C à A'B', (respectivement de A' à BC, de B' à AC, de C' à AB).

On suppose que δ_A, δ_B, δ_C se coupent en un point O.

1. On suppose que BC et B'C' ne sont pas parallèles, et on pose :

$$a = \delta_A \cap BC, \quad a' = \delta_{A'} \cap B'C'.$$

Montrer que les triangles a'A'B' et aCO d'une part, a'A'C' et aBO d'autre part, sont homothétiques.

En déduire que :

$$\frac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}$$

2. Soit f l'unique application affine telle que :

$$A' = f(A), \quad B' = f(B), \quad C' = f(C).$$

Montrer que si BC et B'C' ne sont pas parallèles, alors

$$a' = f(a), \text{ et } \delta_{A'} = f(\delta_A).$$

3. Montrer que $\delta_{A'} = f(\delta_A)$ même si BC et B'C' sont parallèles.

4. Déduire des questions précédentes que les droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ se coupent un un point O'. Que peut-on dire de O' et f(O) ?

Deuxième partie :

$\mathcal{P}$ désigne maintenant le plan affine euclidien.

1. Soit (A,B,C) un triangle de $\mathcal{P}$ et a, (resp b, resp c) un point de BC, (resp AC, resp AB). Soit D_a, (resp D_b ; resp D_c), la perpendiculaire issue de a à BC, (resp de b à CA, resp de c à AB).

Prouver que si D_a, D_b, D_c concourent en un point Ω, alors :

$$(1) \quad aB^2 - aC^2 + bC^2 - bA^2 + cA^2 - cB^2 = 0.$$

Prouver la réciproque du résultat précédent. (On pourra utiliser le résultat direct).

2. Soient maintenant (A,B,C), (A',B',C') deux triangles (non aplatis) de $\mathcal{P}$. On note δ_A la perpendiculaire issue de A à B'C', δ_B celle isue de B à A'C', δ_C celle isue de C à A'B'.

On définit de même $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ comme étant les perpendiculaires issues de A' à BC, de B' à CA, de C' à AB.

Soient :

$$\begin{cases} a = \delta_{A'} \cap BC, & b = \delta_{B'} \cap CA, \quad c = \delta_{C'} \cap AB \\ a' = \delta_A \cap B'C', & b' = \delta_B \cap C'A', \quad c' = \delta_C \cap A'B' \end{cases}$$

En utilisant, (en justifiant), des relations du type :

$$a'B'^2 - a'C'^2 = AB'^2 - AC'^2$$

ainsi que les résultats antérieurs de cette partie, prouver que δ_A, δ_B, δ_C sont concourantes si et seulement si $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ le sont.

Troisième partie :

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien orienté, (A,B,C), (A',B',C') 2 triangles non aplatis.

Soit θ un réel, δ_A, δ_B, δ_C, $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ les droites passant par A, B, C, A', B', C' respectivement, telles que :

$$\begin{cases} (B'C', \delta_A) = (C'A', \delta_B) = (A'B', \delta_C) = \theta \text{ (angles orientés de droites)} \\ (BC, \delta_{A'}) = (CA, \delta_{B'}) = (AB, \delta_{C'}) = -\theta \text{ (angles orientés de droites).} \end{cases}$$

On suppose que δ_A, δ_B, δ_C se coupent en O, distinct de A,B,C.

1. Si $(B'C', BC) \neq \theta$, on pose : $a = \delta_A \cap BC$, $a' = \delta_{A'} \cap B'C'$.

α) Prouver qu'il existe deux similitudes directes r et s de $\mathcal{P}$ telles que :

$r(a) = a'$, $r(O) = C'$, $r(B) = A'$

$s(a) = a'$, $s(O) = B'$, $s(C) = A'$

β) Soient $\vec{r}$ et $\vec{s}$ les parties linéaires de r et s.

Calculer $\vec{r} \circ (\vec{s}^{-1})(\overrightarrow{a'B'})$ et $(\vec{s}^{-1}) \circ \vec{r}(\overrightarrow{aB})$

En déduire que $(\vec{r} \circ (\vec{s}^{-1}) = (\vec{s}^{-1}) \circ \vec{r}$ est une homothétie, puis que :

$$\frac{\overline{a'C'}}{\overline{a'B'}} = \frac{\overline{aC}}{\overline{aB}}$$

Soit f l'unique application affine de $\mathcal{P}$ telle que :

$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

γ) Prouver que $a' = f(a)$, et que $\delta_{A'} = f(\delta_A)$.

2. Prouver que si $(B'C', BC) = \theta$, on a encore $\delta_{A'} = f(\delta_A)$

3. Que se passe-t-il si $O \in \{A,B,C\}$?

4. Enoncer le théorème démontré dans cette partie. Retrouve-t-on les résultats des deux premières parties ?

Quatrième partie :

On identifie $\mathcal{P}$ et le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On se propose de retrouver les résultats précédents.

1. Soient Z et Z' deux complexes non nuls, $\Delta = \mathbb{R} Z$ (droite OZ), $\Delta' = \mathbb{R}Z'$.

Montrer que :

$$[(\Delta, \Delta') = \theta \quad (\pi)] \iff (Z'\overline{Z} - e^{2i\theta} Z\overline{Z'} = 0)$$

On conserve les notations de la troisième partie, et A est d'affixe α, B d'affixe β, C γ, A' α', B' β', C' γ'.

2. Montrer que l'équation de δ_A est :

$$Z(\overline{\beta}' - \overline{\gamma}') - e^{2i\theta}\overline{Z}(\beta' - \gamma') = \alpha(\overline{\beta}' - \overline{\gamma}') - e^{2i\theta}\overline{\alpha}(\beta' - \gamma')$$

3. Prouver que, puisque A'B'C' ne sont pas alignés, on a :

$$\alpha'(\overline{\beta}' - \overline{\gamma}') + \beta'(\overline{\gamma}' - \overline{\alpha}') + \gamma'(\overline{\alpha}' - \overline{\beta}') \neq 0$$

4. Déduire de ce qui précède que δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes si et seulement si :

$$\varphi_\Theta(\alpha, \beta, \gamma ; \alpha', \beta', \gamma') = \alpha(\overline{\beta}' - \overline{\gamma}') + \beta(\overline{\gamma}' - \overline{\alpha}') + \gamma(\overline{\alpha}' - \overline{\beta}')$$

$$- e^{2i\theta}[\overline{\alpha}(\beta'-\gamma') + \overline{\beta}(\gamma'-\alpha') + \overline{\gamma}(\alpha'-\beta')] = 0.$$

5. Montrer que :

$$\varphi_\Theta(\alpha, \beta, \gamma ; \alpha', \beta', \gamma') = e^{2i\theta} \varphi_{-\Theta}(\alpha', \beta', \gamma' ; \alpha, \beta, \gamma).$$

6. En déduire que δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes en O si et seulement si $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ le sont en O', que l'on ne cherchera pas à caractériser dans cette question.

On va prouver que O' = f(O), où f est l'unique application affine telle que : f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'.

7. f se traduit par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$f(Z) = uZ + v\overline{Z} + w, \ ((u,v,w) \in \mathbb{C}), \text{ avec } \alpha' = f(\alpha),\ \beta' = f(\beta),\ \gamma' = f(\gamma).$$

Calculer $\varphi_\Theta(\alpha, \beta, \gamma ; \alpha', \beta', \gamma')$ en fonction de α, β, γ, u,v,w.

8. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur (u,v,w) pour que les droites δ_A, δ_B, δ_C construites à partir de (A,B,C), (f(A),f(B),f(C)) soient concourantes ?

9. On suppose que :

$$(2) \quad \overline{u} + e^{2i\theta} u = 0.$$

En utilisant les équations de δ_A, δ_B, δ_C, $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ (IV - 2), et (2), montrer que les affixes Z de O et Z' de O' sont liées par :

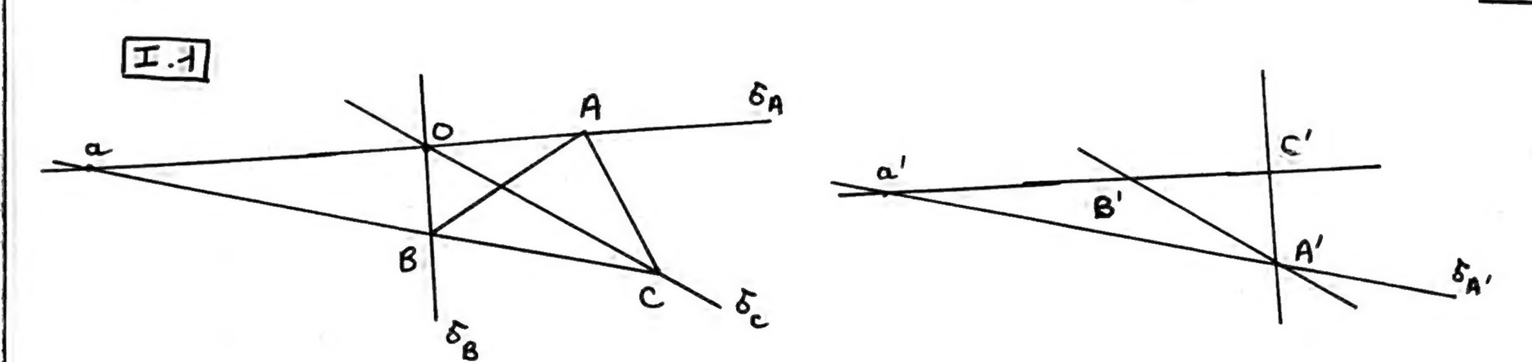
$$(3) \quad \frac{Z - \alpha}{\overline{Z} - \overline{\alpha}} = \frac{-\overline{u}(Z' - \alpha') + v(\overline{Z'} - \overline{\alpha'})}{\overline{v}(Z' - \alpha') - u(\overline{Z'} - \overline{\alpha'})}$$

10. En déduire que :

$$(4) \quad \frac{Z' - \alpha'}{u(Z - \alpha) + v(\overline{Z} - \overline{\alpha})}$$ est réel. On montrera, si besoin est, que $|u|^2 - |v|^2 \neq 0$.

11. Montrer que O' est à l'intersection de 3 droites, dont l'unique point commun est f(O) ; conclure. (On utilisera (4) et 2 relations analogues).

I.1



$a'A'B'$ et aCO ont leurs côtés parallèles 2 à 2, donc sont homothétiques d'après le Th. de Desargues [T]. Par suite : $\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{aO}} = \dfrac{\overline{a'A'}}{\overline{aC}}$

De même, $a'A'C'$ et aBO sont homothétiques (ie se déduisent l'un de l'autre par une homothétie ou une translation) et : $\dfrac{\overline{a'C'}}{\overline{aO}} = \dfrac{\overline{a'A'}}{\overline{aB}}$

d'où l'on déduit $\overline{a'B'}.\overline{aC} = \overline{a'C'}.\overline{aB} \Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = \dfrac{\overline{aB}}{\overline{aC}}}$

I.2 * $\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = \dfrac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = k \Rightarrow \vec{aB} = k\,\vec{aC}$ et $\vec{a'B'} = k\,\vec{a'C'}$

Si f est affine et transforme A,B,C en A',B',C', f conserve les barycentres, donc $\vec{aB} = k\vec{aC}$ entraîne $\overrightarrow{f(a)B'} = k\,\overrightarrow{f(a)C'}$ ie $\boxed{f(a) = a'}$ = barycentre de $A'(0), B'(1), C'(-k)$

* Comme $f(A) = A'$ et $f(a) = a'$, l'image de $\delta_A = (Aa)$ par f sera $\delta_{A'} = (A'a')$, soit : $\boxed{f(\delta_A) = \delta_{A'}}$

I.3 Si $(BC)//(B'C')$, $BC // \delta_A \Rightarrow f((BC)) = (B'C') \; // \; f(\delta_A)$

$A \in \delta_A$ donc $A' = f(A) \in f(\delta_A)$. $f(\delta_A)$ passe par A' en étant parallèle à $(B'C')$, c'est donc $\delta_{A'}$.

I.4 $O \in \delta_A \cap \delta_B \cap \delta_C \Rightarrow f(O) \in f(\delta_A) \cap f(\delta_B) \cap f(\delta_C) = \delta_{A'} \cap \delta_{B'} \cap \delta_{C'}$ d'après II.2. et II.3. Comme $\delta_{A'} \neq \delta_{B'}$ (sinon $(BC)//(AC)$) on en déduit que $\delta_{A'}, \delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ <u>sont concourantes en un point $O' = f(O)$</u>.

II.1

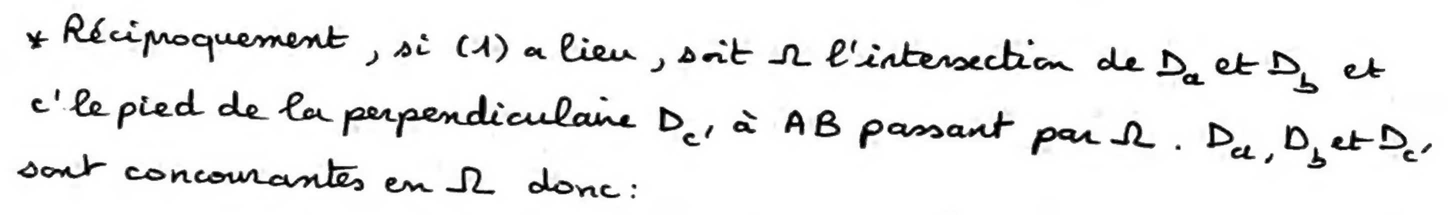
A, B, C, c, b, a, D_a, D_b, D_c, Ω

* Si D_a, D_b, D_c sont concourante, le th. de Pythagore donne :

$$\begin{cases} A\Omega^2 = Ac^2 + c\Omega^2 = Ab^2 + b\Omega^2 \\ B\Omega^2 = Ba^2 + a\Omega^2 = Bc^2 + c\Omega^2 \\ C\Omega^2 = Cb^2 + b\Omega^2 = Ca^2 + a\Omega^2 \end{cases}$$

$$Ba^2 + Ac^2 + Cb^2 = Bc^2 + Ab^2 + Ca^2$$

$$aB^2 - aC^2 + bC^2 - bA^2 + cA^2 - cB^2 = 0 \qquad (1)$$



* Réciproquement, si (1) a lieu, soit Ω l'intersection de D_a et D_b et c' le pied de la perpendiculaire $D_{c'}$ à AB passant par Ω. D_a, D_b et $D_{c'}$ sont concourantes en Ω donc :

$$aB^2 - aC^2 + bC^2 - bA^2 + c'A^2 - c'B^2 = 0$$

En retranchant de la même égalité obtenue avec a, b et c :

$$c'A^2 - c'B^2 = cA^2 - cB^2$$

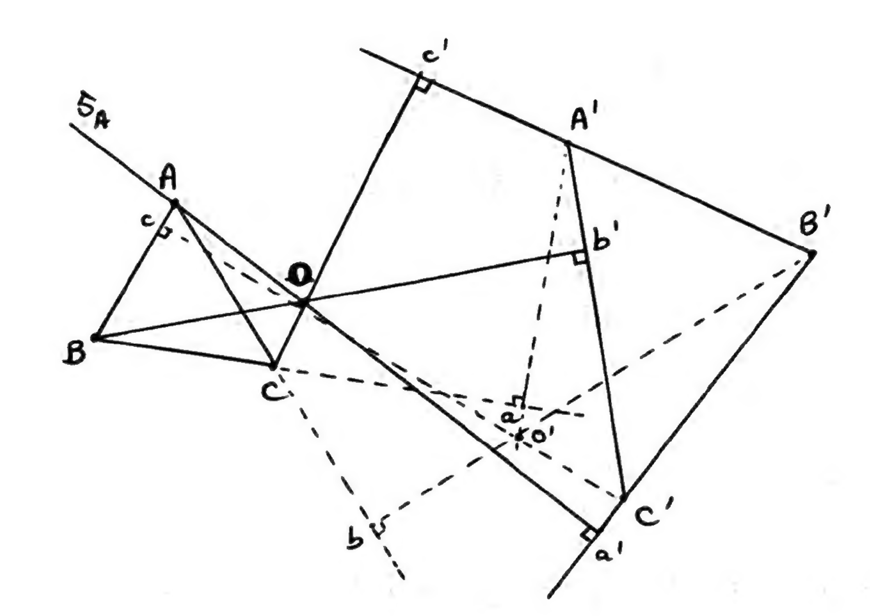
$$c'A^2 - (\vec{c'A} + \vec{AB})^2 = \vec{cA}^2 - (\vec{cA} + \vec{AB})^2$$

$$-2\,\vec{c'A}.\vec{AB} = -2\,\vec{cA}.\vec{AB}$$

$$\vec{AB}.\vec{c'c} = 0 \Rightarrow c = c' \quad (\text{car } \vec{cc'} \text{ et } \vec{AB} \text{ sont colinéaires}).$$

CQFD

II.2



On a : $a'B'^2 - a'C'^2 = (\overrightarrow{a'A} + \overrightarrow{AB'})^2 - (\overrightarrow{a'A} + \overrightarrow{AC'})^2 = 2\,\overrightarrow{a'A}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'})}_{\overrightarrow{C'B'}} + AB'^2 - AC'^2$

$= AB'^2 - AC'^2$ car $(a'A) \perp (C'B')$.

et les 2 autres égalités obtenues par permutation circulaire des symboles A, B, C et a, b, c.

On aura de même les égalités $aB^2 - aC^2 = A'B^2 - A'C^2$ ... obtenues en changeant les lettres primées en non primées et réc. Alors :

$$\delta_A, \delta_B, \delta_C \text{ concourantes} \underset{\text{II.1}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{a'B'^2 - a'C'^2}_{AB'^2 - AC'^2} + \underbrace{b'C'^2 - b'A'^2}_{BC'^2 - BA'^2} + \underbrace{c'A'^2 - c'B'^2}_{CA'^2 - CB'^2} = 0$$

$$\delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'} \text{ concourantes} \underset{\text{II.1}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{aB^2 - aC^2}_{A'B^2 - A'C^2} + \underbrace{bC^2 - bA^2}_{B'C^2 - B'A^2} + \underbrace{cA^2 - cB^2}_{C'A^2 - C'B^2} = 0$$

On peut conclure :

$$\boxed{\delta_A, \delta_B, \delta_C \text{ concourantes} \Longleftrightarrow \delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'} \text{ concourantes}}$$

III.1.α (Voir la figure en p)

* aOB et a'C'A' semblables ?

$$\begin{cases} \widehat{aB, aO} = \widehat{BC, \delta_A} = \underbrace{\widehat{BC, \delta_{A'}}}_{-\theta} + \widehat{\delta_{A'}, B'C'} + \underbrace{\widehat{B'C', \delta_A}}_{\theta} = \widehat{\delta_{A'}, B'C'} \\ \widehat{a'A', a'C'} = \widehat{\delta_{A'}, B'C'} \end{cases}$$

donc $\boxed{\widehat{aB, aO} = \widehat{a'A', a'C'}}$

$$\begin{cases} \widehat{OB, Oa} = \widehat{\delta_B, \delta_A} \\ \widehat{C'A', C'a'} = \widehat{C'A', B'C'} = \underbrace{\widehat{C'A', \delta_B}}_{\theta} + \widehat{\delta_B, \delta_A} + \underbrace{\widehat{\delta_A, \delta B'C'}}_{-\theta} = \widehat{\delta_B, \delta_A} \end{cases}$$

donc $\boxed{\widehat{OB, Oa} = \widehat{C'A', C'a'}}$

Les triangles aOB et a'C'A' sont directement semblables car possèdent 2 angles respectifs égaux.

* On montre de même que aOC et a'B'A' sont directement semblables

III.1.β $\vec{r}\vec{s}^{-1}(\overrightarrow{a'B'}) = \vec{r}(\overrightarrow{aO}) = \overrightarrow{a'C'}$

$\vec{s}^{-1}\vec{r}(\overrightarrow{aB}) = \vec{s}^{-1}(\overrightarrow{a'A'}) = \overrightarrow{aC}$

Les similitudes vectorielles directes planes forment un groupe commutatif, donc $\vec{r}\vec{s}^{-1} = \vec{s}^{-1}\vec{r}$ est une similitude directe. L'image de $\overrightarrow{a'B'}$ par cette similitude est $\overrightarrow{a'C'}$ colinéaire à $\overrightarrow{a'B'}$: <u>$\vec{r}\vec{s}^{-1} = \vec{s}^{-1}\vec{r}$ est donc une homothétie h.</u>

Donc : $\exists k \in \mathbb{R}$ $\quad \overrightarrow{a'C'} = k\,\overrightarrow{a'B'}$ et $\overrightarrow{aC} = k\,\overrightarrow{aB}$

$\overrightarrow{aB} \neq \vec{0}$ sinon $a = B \Rightarrow \delta_A = (AB)$ et comme $\delta_B \cap (AB) = \{B\}$, O sera égal à B, absurde. Donc :

$$\boxed{\frac{\overline{a'C'}}{\overline{a'B'}} = \frac{\overline{aC}}{\overline{aB}}}$$

III.1.γ Comme au I.2 :

f affine conserve les barycentres et $\dfrac{\overline{a'C'}}{\overline{a'B'}} = \dfrac{\overline{aC}}{\overline{aB}}$, donc $f(a) = a'$

$f(A) = A'$ et $f(a) = a'$ donc $f(\delta_A) = f((Aa)) = (A'a') = \delta_{A'}$

III.2 Si $(B'C', BC) = \theta$, $(BC) \parallel \delta_A \Rightarrow f((BC)) = (B'C') \parallel f(\delta_A)$

De plus $A \in \delta_A \Rightarrow A' = f(A) \in f(\delta_A)$.

$f(\delta_A)$ et $\delta_{A'}$ passent par A' et sont parallèles à $(B'C')$ donc $f(\delta_A) = \delta_{A'}$.

III.3 Si $O \in \{A, B, C\}$, par ex. $O = A$, alors $\delta_B = (AB)$, $\delta_C = (AC)$ donc

$\widehat{C'A', AB} = \widehat{A'B', AC} = \theta$.

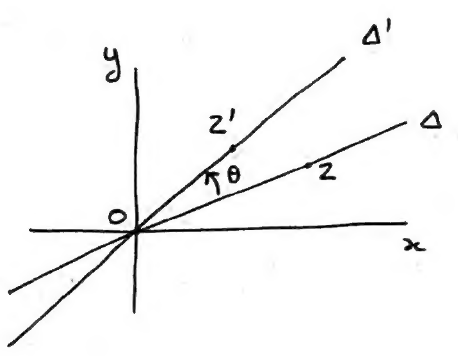
Compte tenu de $\widehat{\delta_{C'}, AB} = \widehat{\delta_{B'}, AC} = \theta$ on obtient $\delta_{C'} = (C'A')$ et $\delta_{B'} = (A'B')$

donc $\delta_{A'} \cap \delta_{B'} \cap \delta_{C'} = \{A'\}$

III.4 <u>On a montré que $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ concourent en O ssi $\delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'}$ concourent en $O' = f(O)$.</u>

* Si $\theta = 0$, on retrouve le résultat de la partie I, mais celle-ci n'a utilisé que des notions affines, alors que la partie III utilise des notions métriques.

* Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient le résultat du II avec le renseignement supplémentaire $O' = f(O)$.

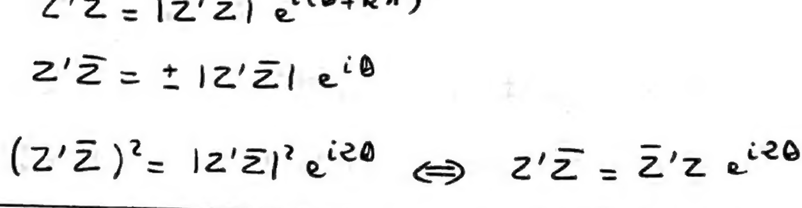


IV.1

$\widehat{\Delta, \Delta'} = \theta \quad [\pi] \iff \widehat{Ox, \Delta'} - \widehat{Ox, \Delta} = \theta \quad [\pi]$

$\arg Z' - \arg Z = \theta \quad [\pi]$

$\arg Z'\bar{Z} = \theta \quad [\pi]$



$Z'\bar{Z} = |Z'\bar{Z}|\, e^{i(\theta + k\pi)}$

$Z'\bar{Z} = \pm |Z'\bar{Z}|\, e^{i\theta}$

$(Z'\bar{Z})^2 = |Z'\bar{Z}|^2 e^{i2\theta} \iff Z'\bar{Z} = \bar{Z}'Z\, e^{i2\theta}$

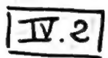
On a bien $\boxed{\widehat{\Delta, \Delta'} = \theta \quad [\pi] \iff Z'\bar{Z} - e^{i2\theta} Z\bar{Z}' = 0}$

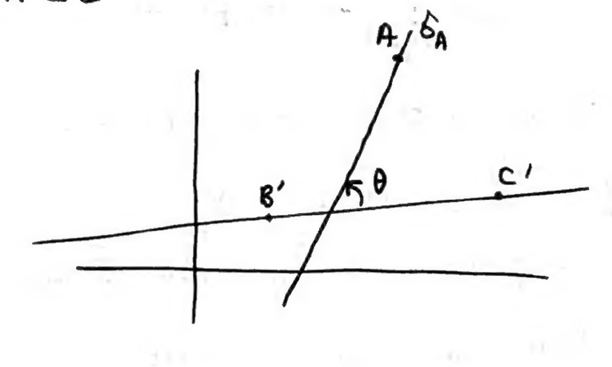
2° solution :

$\widehat{\Delta,\Delta'} = \theta \quad [\pi]$ ssi on passe de Z à Z' par une similitude directe de centre O et d'angle θ ou $\theta+\pi$, ie s'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $Z' = k e^{i\theta} Z$.

Alors $\bar{Z}' = k e^{-i\theta} \bar{Z}$ et en éliminant k, on obtient $Z'\bar{Z} = e^{i2\theta} Z \bar{Z}'$.

Réciproquement, si $Z'\bar{Z} = e^{i2\theta} Z\bar{Z}'$, alors $Z'Z^{-1}e^{-i\theta} = \bar{Z}'\bar{Z}^{-1}e^{i\theta}$ montre que $Z'Z^{-1}e^{-i\theta}$ est réel, et donc que $Z' = k Z e^{i\theta}$


IV.2



$M(Z) \in \delta_A \Leftrightarrow \widehat{B'C', AM} = \theta \quad [\pi]$

L'équation de δ_A s'obtient en faisant

$$\begin{cases} Z = \gamma' - \beta' \\ Z' = z - \alpha \end{cases}$$ dans IV.1.

On obtient : $(z-\alpha)(\bar{\gamma}'-\bar{\beta}') - e^{i2\theta}(\bar{z}-\bar{\alpha})(\gamma'-\beta') = 0$

d'où $z(\bar{\beta}'-\bar{\gamma}') - e^{i2\theta}\bar{z}(\beta'-\gamma') = \alpha(\bar{\beta}'-\bar{\gamma}') - e^{i2\theta}\bar{\alpha}(\beta'-\gamma')$

IV.3 $A'(\alpha')$, $B'(\beta')$, $C'(\gamma')$ non alignés ssi $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}$ non colinéaires, ie ($\theta = 0$ en IV.1) :

$(\beta'-\alpha')(\bar{\gamma}'-\bar{\beta}') \neq (\bar{\beta}'-\bar{\alpha}')(\gamma'-\beta')$

soit : $\alpha'(\bar{\beta}'-\bar{\gamma}') + \beta'(\bar{\gamma}'-\bar{\alpha}') + \gamma'(\bar{\alpha}'-\bar{\beta}') \neq 0$

IV.4 δ_A, δ_B et δ_C seront concourantes ssi le système suivant admet une solution Z unique :

$$\begin{cases} z(\bar{\beta}'-\bar{\gamma}') - e^{i2\theta}\bar{z}(\beta'-\gamma') = \alpha(\bar{\beta}'-\bar{\gamma}') - e^{i2\theta}\bar{\alpha}(\beta'-\gamma') & : \delta_A \\ z(\bar{\gamma}'-\bar{\alpha}') - e^{i2\theta}\bar{z}(\gamma'-\alpha') = \beta(\bar{\gamma}'-\bar{\alpha}') - e^{i2\theta}\bar{\beta}(\gamma'-\alpha') & : \delta_B \\ z(\bar{\alpha}'-\bar{\beta}') - e^{i2\theta}\bar{z}(\alpha'-\beta') = \gamma(\bar{\alpha}'-\bar{\beta}') - e^{i2\theta}\bar{\gamma}(\alpha'-\beta') & : \delta_C \end{cases}$$

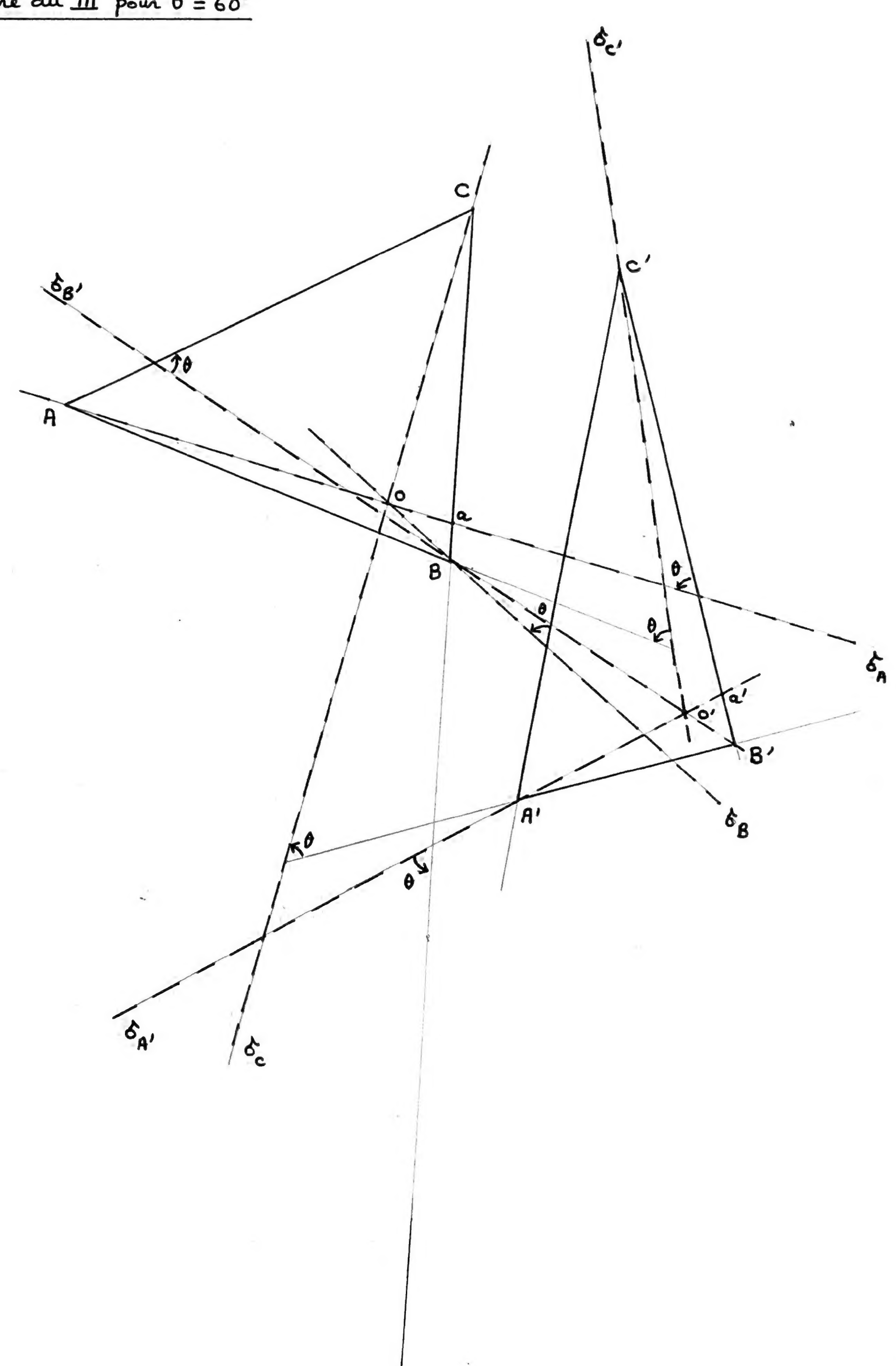
Le déterminant des 2 premières équations est $e^{i2\theta}\left[(\bar{\beta}'-\bar{\gamma}')(\alpha'-\gamma') + (\bar{\gamma}'-\bar{\alpha}')(\beta'-\gamma')\right]$, donc non nul (IV.3) car A', B', C' ne sont pas alignés. Ces 2 premières équations admettent donc un couple solution unique (X, Y). On vérifie que $Y = \bar{X}$.

Si Z est solution des 2 premières équations, il sera solution des 3 équations ssi (condition de compatibilité) :

$$0 = \alpha(\bar{\beta}'-\bar{\gamma}') + \beta(\bar{\gamma}'-\bar{\alpha}') + \gamma(\bar{\alpha}'-\bar{\beta}') - e^{i2\theta}\left[\bar{\alpha}(\beta'-\gamma') + \bar{\beta}(\gamma'-\alpha') + \bar{\gamma}(\alpha'-\beta')\right]$$

(on a additionné les 3 équations) C'est la condition cherchée.

Figure du III pour $\theta = 60°$



IV.5

$$\varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma') = e^{i2\theta}\Big[e^{-i2\theta}[\alpha(\bar\beta'-\bar\gamma')+\beta(\bar\gamma'-\bar\alpha')+\gamma(\bar\alpha'-\bar\beta')] - \bar\alpha(\beta'-\gamma')-\bar\beta(\gamma'-\alpha') - \bar\gamma(\alpha'-\beta')\Big]$$

$$= e^{i2\theta}\,\varphi_{-\theta}(\alpha',\beta',\gamma';\alpha,\beta,\gamma)$$

IV.6 Compte tenu des questions précédentes :

$\delta_A,\delta_B,\delta_C$ concourantes $\overset{IV.4}{\Leftrightarrow}$ $\varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma')=0$

$\underset{IV.5}{\Leftrightarrow}$ $\varphi_{-\theta}(\alpha',\beta',\gamma';\alpha,\beta,\gamma)=0$ $\underset{IV.4}{\Leftrightarrow}$ $\delta_{A'},\delta_{B'},\delta_{C'}$ concourantes

IV.7 $f(z)=uz+v\bar z+w$ vérifie $f(\alpha)=\alpha'$, $f(\beta)=\beta'$ et $f(\gamma)=\gamma'$ ssi :

$$\begin{cases} u\alpha+v\bar\alpha+w=\alpha' \\ u\beta+v\bar\beta+w=\beta' \\ u\gamma+v\bar\gamma+w=\gamma' \end{cases}$$

d'où $\beta'-\gamma'=u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)$

et les 2 autres relations obtenues par permutation circulaire de α,β,γ.

Par suite,

$$\varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma') = \alpha[\bar u(\bar\beta-\bar\gamma)+\bar v(\beta-\gamma)]+\beta[\bar u(\bar\gamma-\bar\alpha)+\bar v(\gamma-\alpha)]+\gamma[\bar u(\bar\alpha-\bar\beta)+\bar v(\alpha-\beta)]$$
$$-e^{i2\theta}\big[\bar\alpha[u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)]+\bar\beta[u(\gamma-\alpha)+v(\bar\gamma-\bar\alpha)]+\bar\gamma[u(\alpha-\beta)+v(\bar\alpha-\bar\beta)]\big]$$

$$\boxed{\varphi_\theta(\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma') = (\bar u+e^{i2\theta}u)\big(\alpha(\bar\beta-\bar\gamma)+\beta(\bar\gamma-\bar\alpha)+\gamma(\bar\alpha-\bar\beta)\big)}$$

IV.8 La CNS pour que $\delta_A,\delta_B,\delta_C$ soient concourantes est (IV.4) :

$$(\bar u+e^{i2\theta}u)\big(\alpha(\bar\beta-\bar\gamma)+\beta(\bar\gamma-\bar\alpha)+\gamma(\bar\alpha-\bar\beta)\big)=0$$

IV.3 a montré que A, B, C étant non alignés, le 2e facteur du produit ci-dessus est non nul. La CNS cherchée est donc : $\boxed{\bar u+e^{i2\theta}u=0}$

IV.9 De l'équation de δ_A : $z(\bar\beta'-\bar\gamma')-e^{i2\theta}\bar z(\beta'-\gamma')=\alpha(\bar\beta'-\bar\gamma')-e^{i2\theta}\bar\alpha(\beta'-\gamma')$

on tire :

$$\boxed{(z-\alpha)(\bar\beta'-\bar\gamma')=e^{i2\theta}(\bar z-\bar\alpha)(\beta'-\gamma')}$$

d'où
$$\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=e^{i2\theta}\frac{\beta'-\gamma'}{\bar\beta'-\bar\gamma'} \qquad (*)$$

Comme $\beta'-\gamma'=u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)$ (IV.7), on obtient :

$$\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=e^{i2\theta}\frac{u(\beta-\gamma)+v(\bar\beta-\bar\gamma)}{\bar u(\bar\beta-\bar\gamma)+\bar v(\beta-\gamma)}=e^{i2\theta}\cdot\frac{u\frac{\beta-\gamma}{\bar\beta-\bar\gamma}+v}{\bar u+\bar v\frac{\beta-\gamma}{\bar\beta-\bar\gamma}}$$

De l'équation de $\delta_{A'}$, on tire (comme ci-dessus, avec $-\theta$ au lieu de θ) :

$$\frac{z'-\alpha'}{\bar z'-\bar\alpha'}=e^{-i2\theta}\frac{\beta-\gamma}{\bar\beta-\bar\gamma}$$

d'où :
$$\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=e^{i2\theta}\frac{ue^{i2\theta}\frac{z'-\alpha'}{\bar z'-\bar\alpha'}+v}{\bar u+\bar v e^{i2\theta}\frac{z'-\alpha'}{\bar z'-\bar\alpha'}}=\frac{ue^{i2\theta}(z'-\alpha')+v(\bar z'-\bar\alpha')}{\bar u e^{-i2\theta}(\bar z'-\bar\alpha')+\bar v(z'-\alpha')}$$

ie, comme $e^{i2\theta}=-\frac{\bar u}{u}$,

$$\boxed{\frac{z-\alpha}{\bar z-\bar\alpha}=\frac{-\bar u(z'-\alpha')+v(\bar z'-\bar\alpha')}{\bar v(z'-\alpha')-u(\bar z'-\bar\alpha')}}$$

NB : 1) On a supposé que $z\neq\alpha$ (et $z'\neq\alpha'$) quitte à refaire le travail avec $\frac{z-\beta}{\bar z-\bar\beta}$ ...

2) $z=\beta \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(\beta-\alpha)(\bar\beta'-\bar\gamma')}{(\bar\beta-\bar\alpha)(\beta'-\gamma')}=e^{i2\theta}\\ \frac{(\beta-\gamma)(\bar\alpha'-\bar\beta')}{(\bar\beta-\bar\gamma)(\alpha'-\beta')}=e^{i2\theta}\end{cases} \Leftrightarrow z'=\beta'$ (utiliser les équations (*) de $\delta_A,\delta_C,\delta_{A'},\delta_{C'}$)

On retrouve le résultat du III.3.

II 10

(5) s'écrit $Z = \dfrac{-\bar{u} Z' + v}{\bar{v} Z' - u}$ où $\begin{cases} Z = \dfrac{z-a}{\bar z - \bar a} \\ Z' = \dfrac{z'-a'}{\bar z' - \bar a'} \end{cases}$

On désire exprimer Z' en fonction de Z. On a :

$$Z'(\bar v Z + \bar u) = uZ + v$$

• Si $\bar v Z + \bar u = 0$, alors $uZ + v = 0$ donc $Z = -\frac{v}{u}$, et $\bar v Z + \bar u = -|v|^2 + |u|^2 = 0$.
Montrons que c'est impossible, ie que $|u|^2 - |v|^2 \neq 0$:

$\vec f(z) = uz + v\bar z$ où $\begin{cases} u = a + ib \\ v = c + id \end{cases}$

d'où $\vec f(z) = (a+ib)(x+iy) + (c+id)(x-iy) = (a+c)x + (d-b)y + i[(b+d)x + (a-c)y]$

La matrice de la partie linéaire $\vec f$ de f est donc :

$$M = \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ b+d & a-c \end{pmatrix}$$

et $\vec f$ étant bijective, $\det M = a^2 - c^2 - d^2 + b^2 = |u|^2 - |v|^2 \neq 0$.

• Donc $\bar v Z + \bar u \neq 0$ et $Z' = \dfrac{uZ + v}{\bar v Z + \bar u}$, que l'on écrit :

$$\frac{z'-a'}{\bar z' - \bar a'} = \frac{u\dfrac{z-a}{\bar z - \bar a} + v}{\bar v \dfrac{z-a}{\bar z - \bar a} + \bar u}$$

$$\frac{z'-a'}{u(z-a) + v(\bar z - \bar a)} = \frac{\bar z' - \bar a'}{\bar u(\bar z - \bar a) + \bar v(z-a)}$$

$\dfrac{z'-a'}{u(z-a) + v(\bar z - \bar a)}$ étant égal à son conjugué, il est réel

IV.11 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\dfrac{z'-\alpha'}{u(z-\alpha)+v(\bar{z}-\bar{\alpha})} = \lambda$

$$z' = \lambda(uz + v\bar{z} - u\alpha - v\bar{\alpha}) + \alpha'$$

$$z' = \lambda(uz + v\bar{z} + w - \alpha') + \alpha' \qquad \text{car } u\alpha + v\bar{\alpha} + w = \alpha'$$

$$z' = \lambda f(z) + (1-\lambda)\alpha'$$

O' apparaît donc comme le barycentre des points $f(o)$, A' affectés des coefficients λ et $1-\lambda$.

De même, O' sera le barycentre de $f(o)$, B' d'une part, et de $f(o)$, C' d'autre part. O' sera donc sur les droites $f(o)A'$, $f(o)B'$ et $f(o)C'$, finalement : $\boxed{O' = f(o)}$.